



‘সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী’

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 1st Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P1-MATHEMATICS

CALCULUS AND GEOMETRY

(REVISED SYLLABUS 2023 / OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any **four** questions from the following: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দেও:

- (a) Find the equation of the sphere described on the join of $P(2, -3, 4)$ and $Q(-5, 6, -7)$ as diameter. 3

$P(2, -3, 4)$ এবং $Q(-5, 6, -7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি একটি ব্যাস হবে এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$P(2, -3, 4)$ অর্থাৎ $Q(-5, 6, -7)$ লাই জোডনে রেখালাই ব্যাস (diameter) লিএর বনানুনে গোলাকারকো সমীকরণ নির্ণয় কর।

- (b) Find the arcs length in the 1st quadrant of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 3

প্রথম অংশ (quadrant) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid টির পরিধি বরাবর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ কো पहिलो quadrant मा पर्ने वृत्तारा (arcs length) निर्णय गर।

- (c) If $y = x^{n-1} \log_e x$, find $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$. 3

যদি $y = x^{n-1} \log_e x$ হয়, তবে $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$y = x^{n-1} \log_e x$ भए, $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$ को मान निकाल।

- (d) Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$, where m is a parameter. 3

$y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ সরলরেখা সমূহের envelope টি নির্ণয় কর, যেখানে m একটি প্যারামিটার।

m parameter भएको सरल रेखासमूह $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ को envelope निर्णय गर।

- (e) Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$. 3

মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$ को मान निर्णय गर।

- (f) Find the intervals in which the function $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$ is concave. 3

$f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$ অপেক্ষকটি কোন অন্তরালে (interval) অবতল হবে তা নির্ণয় কর।

ফলন $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$ অবতল (concave) হুনে অন্তরালहरू निर्णय गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions from the following: 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কুনৈ चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (a) Find the envelope of the family of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, where a and b are constants connected by $a + b = c$. 6

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত সমূহের envelope টি নির্ণয় কর, যেখানে a এবং b ধ্রুবক হয় $a + b = c$ সম্পর্ক দ্বারা সংযুক্ত।

a অনি b स्थिराङ्कहरू हुन् अनि $a + b = c$ भए अण्डवृत्तहरूको समूह $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को envelope निर्णय गर।

- (b) Find the asymptotes of the curve $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$. 6

$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ বক্ররেখাটির asymptote গুলি নির্ণয় কর।

वक्र $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ को अनन्त स्पर्शकहरू निर्णय गर।

- (c) Find the equations of the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which pass through the point $(2, 3, -4)$. 6

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উৎপাদিত সরলরেখা (generating line) গুলির সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, 3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$(2, 3, -4)$ बाट पार हुने hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ को उत्पादन गर्ने रेखाहरूको समीकरण निर्णय गर।

- (d) Find the volume of the solid generated by the revolution of the region enclosed by $y^2 = 4ax$ and the lines $y = 0$, and $x = a$ about its axis. 6

$y^2 = 4ax$ এবং $y = 0$, $x = a$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটিকে অক্ষের সাপেক্ষে ঘোরালে উৎপন্ন ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

$y^2 = 4ax$ अनि रेखाहरू $y = 0$ अनि $x = a$ ले संलग्न क्षेत्रलाई त्यसको अक्षमा घुमाउँदा उत्पन्न हुने ठोसको आयतन निर्णय गर।

- (e) Find the reduction formula for $I_n = \int \sin^n x dx$ and hence find $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$. 6

$I_n = \int \sin^n x dx$ এর (হ্রাস) reduction সূত্রটি নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$ নির্ণয় কর।

$I_n = \int \sin^n x dx$ को reduction formula निर्णय गर साथै $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$ को मान निर्णय गर।

- (f) Reduce the equation $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$ to its canonical form and determine the nature of conic represented by it. 6

$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$ সমীকরণকে canonical রূপে রূপান্তরিত কর এবং ইহা হইতে conic টির প্রকৃতি নির্ণয় কর।

সমীকরণ $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$ লাই canonical রূপমা পরিণত গরি ত্যস শংকুको प्रकृति निर्णय गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কোন দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেউ :

- (a) (i) If, by a rotation of rectangular axes about the origin, the expression $(ax^2 + 2hxy + by^2)$ change to $(a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2)$ then prove that $a + b = a' + b'$. 6

অক্ষদ্বয়কে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কোন একটি কোনে ঘোরালে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিমালাটি $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ তে পরিবর্তিত হয়, তাহলে প্রমাণ কর $a + b = a' + b'$ ।

মূলবিন্দুको सापेक्षमा आयताकार अक्षहरूलाई परिक्रमा गराउँदा $(ax^2 + 2hxy + by^2)$ को परिणित रूप $(a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2)$ भए प्रमाण गर : $a + b = a' + b'$ ।

- (ii) Find the reduction formula for $\int \tan^n x dx$, when $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$ and then find $\int \tan^5 x dx$. 6

$\int \tan^n x dx$ এর হ্রাস সূত্রটি নির্ণয় কর, যখন $n > 1$ এবং $n \in \mathbb{N}$ । ইহা হইতে $\int \tan^5 x dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

$n > 1$ अनि $n \in \mathbb{N}$ को निम्ति $\int \tan^n x dx$ को reduction सूत्र निर्णय गरी $\int \tan^5 x dx$ को मान निर्णय गर।

- (b) (i) If $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, show that 6

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

যদি $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয়, প্রমাণ কর

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ भए, प्रमाण गर :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

- (ii) Find the area included between the curves $x^2 + 2y^2 = 4$ and $2x^2 + y^2 = 4$. 6

$x^2 + 2y^2 = 4$ এবং $2x^2 + y^2 = 4$ বক্ররেখা দ্বয়ের অন্তর্বর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

वक्रहरू $x^2 + 2y^2 = 4$ अनि $2x^2 + y^2 = 4$ को मझ पर्ने क्षेत्रको क्षेत्रफल निर्णय गर।

- (c) (i) Show that the points of inflexion of the curve $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ lies on the line $3x+a=4b$. 6

देखाओ ये $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ बक्ररेखाটির विद्युति बिन्दु (points of inflexion) गुलि $3x+a=4b$ सरलरेखार उपर अवस्थित।

वक्र $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ को inflexion बिन्दु रेखा $3x+a=4b$ मा रहन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ii) Reduce the equation 6

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$$

to the canonical form and find the nature of it.

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$ समीकरणके canonical रूपे प्रकाश कर एवं इहार प्रकृति निर्णय कर।

समीकरण $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$ लाई canonical रूपमा परिणत गरी त्यसको प्रकृति निर्णय गर।

- (d) (i) Find the equation of the sphere passing through the point $(2, 3, 1)$ and the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 4z + 4 = 0$, $x + 2y + 3z = 6$. 6

$(2, 3, 1)$ बिन्दु এবং $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 4z + 4 = 0$, $x + 2y + 3z = 6$ वृत्त দিয়ে अতিক्रান্ত গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(2, 3, 1)$ बिन्दुबाट पार हुने अनि वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 4z + 4 = 0$, $x + 2y + 3z = 6$ बाट पनि पार हुने गोलाकारको समीकरण निर्णय गर।

- (ii) Find the polar equation of the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, if the pole be at its right hand focus and the positive direction of x -axis be the positive direction of the polar axis. 6

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের polar সমীকরণটি নির্ণয় কর, যদি মূলবিন্দু (pole) টি উপবৃত্তের ডানদিকের নাভী এবং x -অক্ষের ধনাত্মক দিকটি polar অক্ষের ধনাত্মক দিককে সূচিত করে।

दाहिने नाभिमा ध्रुव भए अनि x -अक्षको सकारात्मक (positive) दिशामा ध्रुवीय अक्षको पनि सकारात्मक दिशा भए अण्डवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ को ध्रुवीय समीकरण गर।

—x—