



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2023

DSE1/2/3-P1-MATHEMATICS

(REVISED SYLLABUS 2023)

The figures in the margin indicate full marks.

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

DSE-1A

NUMERICAL METHODS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 40

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any *five* questions: 1×5 = 5
নিম্নলিখিত যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
কোন পাঁচ প্রশ্নের উত্তর দেওঃ
- (a) If $V_T = 3.753627$ and $V_A = 3.7537$ are the true value and approximate value respectively, then find absolute and relative errors.
যদি $V_T = 3.753627$ এবং $V_A = 3.7537$ যথাক্রমে সঠিক মান এবং আনুমানিক মান হলে absolute এবং relative ত্রুটিগুলি নির্ণয় কর।
যদি $V_T = 3.753627$ অনি $V_A = 3.7537$ কুনৈ সংলে সাঁচো মান র অনুমানিত মান ভএ নিরপেক্ষ ত্রুটি র সাপেক্ষ ত্রুটি নির্ণয় गर।
- (b) Calculate $(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$.
 $(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$ -এর মান নির্ণয় কর।
 $(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$ নির্ণয় गर।
- (c) What is a sufficient condition for the convergence of Newton-Raphson method?
Newton-Raphson পদ্ধতিটি অভিসারি হওয়ার যথেষ্ট শর্তটি কি ?
Newton-Raphson পদ্ধতি অভিকেন্দ্রীত হুনে পর্যাপ্ত শর্তহরু কে হো ?
- (d) Why polynomials are used for approximating in interpolation?
কেন বহুপদী আসন্ন interpolation-এর জন্য ব্যবহৃত হয় ?
Interpolation অনুমানিত গর্দ বহুপদহরু কিন প্রয়োগমা আউঁত।
- (e) What are the demerits of Lagrange's interpolation formula?
Lagrange interpolation সূত্রের ত্রুটিগুলি কি কি ?
Lagrange কৌ interpolation সূত্র কৌ অগুণহরু কে হো ?

- (f) What is the degree of approximating polynomial corresponding to the Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule?

Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule-এর শ্রেণিতে approximating বহুপদী রাশিমালার মাত্রা কি ?

Simpson को $\frac{1}{3}$ नियम संग सम्बन्धित अनुमानित बहुपदको डिग्री के हो ?

- (g) What is the order of Convergence of Regula-Falsi method?

Regula-Falsi পদ্ধতির অভিসারনের ক্রম কি ?

Regula-Falsi পদ্ধতিকো अभिकेन्द्रन को order के के हो ?

- (h) Convert the following system of equations in diagonally dominant form:

নিম্নলিখিত সমীকরণ তন্ত্রটিকে diagonally dominant রূপে প্রকাশ করঃ

दिइएको समीकरण प्रणाली लाई विकर्ण dominant रूपमा परिणत गर ।

$$x - y + 5z = 7$$

$$6x + y + z = 20$$

$$x + 4y - z = 6$$

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **three** questions:

5×3 = 15

নিম্নলিখিত যে-কোন **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै **तीन** प्रश्नका उत्तर देऊः

- (a) Explain the bisection method for computing a real root of the equation $f(x) = 0$. Also, give its geometrical interpretation.

$f(x) = 0$ কোন একটি সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ নির্ণয়ের bisection পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা কর। এছাড়াও ইহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

समीकरण $f(x) = 0$ को वास्तविक मूल गणना गर्ने bisection पद्धति व्याख्या गर । यसको ज्यामितीय व्याख्या पनि गर ।

- (b) Solve the system by Gauss-Jacobi iteration method:

Gauss-Jacobi iteration পদ্ধতি অনুসারে সমাধান করঃ

दिइएको प्रणालीलाई Gauss-Jacobi iteration पद्धति द्वारा समाधान गरः

$$x + y + 4z = 9$$

$$8x - 3y + 2z = 20$$

$$4x + 11y - z = 33$$

- (c) Given the following table, find $f(x)$ assuming it to be a polynomial of degree three in x .

নিম্নলিখিত সারণী দেওয়া আছে, x -এর তিন মাত্রায়ুক্ত বহুপদী রাশিমালার ধরে $f(x)$ নির্ণয় করঃ

निम्न दिइएको तालिका बाट, $f(x)$ लाई x मा degree तीन भएको polynomial मानी $f(x)$ निर्णय गरः

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	11	34

- (d) Evaluate $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$, by using Weddle's rule, taking 6 (six) intervals, correct upto 2 decimal places.

Weddle-এর নীতি প্রয়োগ করে $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$ এর মান নির্ণয় কর (সঠিক 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত) 6টি অন্তরাল ধরে নিয়ে।

Weddle को नियम द्वारा $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$ को निर्णय गर । 6 वटा अन्तरल लिएर अनि 2 दशमलव places सम्म ।

- (e) Use Euler's method, solve the following problem for $x = 0.4$ by taking $h = 0.2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x} \quad \text{with } y(0) = 1$$

Euler's পদ্ধতি ব্যবহার করে, $x = 0.4$ এর জন্য নিম্নলিখিত সমস্যাটি সমাধান কর যেখানে $h = 0.2$

এবং $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x}$ ।

Euler को पद्धति द्वारा दिइएको problem समाधान गर $x = 0.4$ को लागि अनि $h = 0.2$ लिएर ।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x} \quad y(0) = 1 \text{ संग}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions

10×2 = 20

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কোন দুই প্রশ্নকা উত্তর দেও

3. (a) Find a positive root of $x^3 + x - 1 = 0$ by the iterative method, correct to two decimal places. 5

Iterative পদ্ধতিতে $x^3 + x - 1 = 0$ সমীকরণটির 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক কোন একটি ধনাত্মক বীজ নির্ণয় কর।

Iterative পদ্ধতি দ্বারা $x^3 + x - 1 = 0$ को धनात्मक मूल प्राप्त गर, दुई दशमलव places सम्म ।

- (b) Give the following table: 5

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

Construct the difference table and compute $f(19)$ by Newton's backward formula.

নিম্নলিখিত সারণী দেওয়া আছে

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

Difference সারণী গঠন কর এবং Newton's backward সূত্র ব্যবহার করে $f(19)$ এর মান নির্ণয় কর।

दिइएको टेबल यस प्रकार छ:

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

Difference टेबल बनाऊ अनि Newton को backward सूत्र बाट $f(19)$ निर्णय गर ।

4. (a) Solve by Gauss-Seidel iteration method, the system

$$3x + 9y - 2z = 11$$

$$4x + 2y + 13z = 24$$

$$4x - 2y + z = -8$$

upto three significant figures.

Gauss-Seidel iteration पद्धति ব্যবহার করে নিম্নলিখিত system টি সমাধান কর তিন সার্থক (significant) পরিসংখ্যান (figures) পর্যন্ত

$$3x + 9y - 2z = 11$$

$$4x + 2y + 13z = 24$$

$$4x - 2y + z = -8$$

Gauss-Seidel iteration पद्धति द्वारा प्रणाली

$$3x + 9y - 2z = 11$$

$$4x + 2y + 13z = 24$$

$$4x - 2y + z = -8 \text{ को समाधान गर 3 significant figures सम्म।}$$

(b) Find the value of $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$ taking 5-sub-intervals, by Trapezoidal Rule, correct

upto 2 significant figures.

পাঁচ উপবিভাগ (Sub-intervals) ধরে, Trapezoidal নিয়ম ব্যবহার করে

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

এর মান নির্ণয় কর দুই সার্থক (Significant) পরিসংখ্যান (figures) পর্যন্ত সঠিক।

5 उपअन्तरल लिए $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$ को मान 2 significant figure सम्म। Trapezoidal को नियम प्रयोग गरेर निर्णय गर।

5. (a) Prove that: / প্রমাণ করঃ / प्रमाण गर:

(i) $\Delta \cdot \nabla = \Delta - \nabla$

(ii) $E \cdot \Delta = \Delta \cdot E$

(b) Obtain the missing terms in the following table:

নিম্নলিখিত সারণী থেকে অনুপস্থিত সংখ্যা (missing term) নির্ণয় কর।

दिइएको तालिका बाट हराएको term प्राप्त गर:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	—	64	—	216	343	512

6. (a) Use Runge-Kutta method of order 2 to approximate y when $x = 0.1$ and $x = 0.2$ given that

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = 2$$

$x = 0.1$ एवं $x = 0.2$ धरे, दुई मात्रार Runge-Kutta पद्धति व्यवहार करे y -एर मान निर्णय कर निम्नलिखित समीकरण थेके

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = 2$$

$x = 0.1$ र $x = 0.2$ हुदाँ y को मान अनुमानित गर्नु order 2 भएको Runge-Kutta पद्धति प्रयोग गर। दिइएको छ $\frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 2$

- (b) Discuss the Gauss-elimination method to find the solution of a given system of equations. 5

एकटि समीकरण तन्त्रेर समाधान निर्णयेर Gauss-elimination पद्धतिटि व्याख्या कर।

दिइएको समीकरणको प्रणाली को समाधान गर्न Gauss-elimination पद्धति व्याख्या गर।

DSE-1B

GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

GROUP-A / विभाग-क / समूह-क

1. Answer any **four** questions from the following: 3×4 = 12

निम्नलिखित ये-कान चारटि प्रश्नेर उत्तर दाओः

कुनै चार प्रश्नहरू उत्तर देऊ।

- (a) Prove that if every element of a group G is its own inverse, then it is an abelian group. 3

प्रमाण कर ये, यदि एकटि ग्रुपेर (group) प्रतिटि उपादान तार निजस inverse হয়, तबे सेटि एकटि abelian group हबे।

यदि ग्रुप G को प्रत्येक element यसको आफ्नै inverse हो भने, यो एउटा abelian ग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

- (b) In a group G , a is an element of order 30, then find the order of a^{18} . 3

एकटि group G ते, a हल एकटि उपादान यार क्रम 30, तारपर a^{18} -एर क्रम खोज।

ग्रुप G मा a order 30 भएको एउटा element हो भने a^{18} को order निर्णय गर।

- (c) Check whether the set $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$ is a subspace of \mathbb{R}^3 or not. 3

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ सेटि \mathbb{R}^3 -एर एकटि साबस्पेस किना ता परीक्षा कर।

सेट $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$ \mathbb{R}^3 को subspace हो वा होइन जाँच गर।

- (d) Show that a Linear mapping $T : V \rightarrow W$ is injective iff $\ker T = \{\theta_v\}$. 3

देखाओ ये एकटि रैखिक म्यापिंग $T : V \rightarrow W$ injective यदि एवं श्रुमात्र यदि $\ker T = \{\theta_v\}$ ।

Linear mapping $T : V \rightarrow W$ injective हो यदि अनि यदि मात्र $\ker T = \{\theta_v\}$ भनी प्रमाण गर।

- (e) Prove that intersection of two subgroups of a group is a subgroup. 3
 প্রমাণ কর যে, একটি group-এর দুটি subgroup-এর ছেদও একটি subgroup হবে।
 যুগ্মকো দুইবটা উপগ্রুপ কো প্রতিচ্ছদন এডটা যুগ্মলে হো ভনী প্রমাণ গর।
- (f) Find all generators of the cyclic group generated by the 7th roots of unity. 3
 1-এর 7th তম বীজ দ্বারা উৎপন্ন করা একটি 'cyclic group'-এর সমস্ত 'generators' খোজ।
 Unity কো 7th root বাট উত্পন্ন भएको cyclic গ্রুপ কা সবে generator হরু কো নির্ণয় গর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions from the following: 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নহরু কো উত্তর দেউ :

- (a) Let $GL_2(\mathbb{R})$ denote the group of all 2×2 non-singular matrices over \mathbb{R} w. r. t. matrix multiplication. Show that the set $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ forms a sub-groups of $GL_2(\mathbb{R})$. 6

ধর $GL_2(\mathbb{R})$ একটি group যেটি \mathbb{R} -এর উপর সমস্ত 2×2 non-singular matrix-এর সংগ্রহ যা matrix গ্রুপ এর সাপেক্ষে group হয়। দেখাও যে, এই সেট $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ -টি $GL_2(\mathbb{R})$ এবং একটি 'Subgroup' গঠন করে।

যদি $GL_2(\mathbb{R})$ লে ম্যাট্রিক্স গুণনকো সন্দর্ভমা \mathbb{R} মা সবে 2×2 non-singular ম্যাট্রিক্সহরু কো যুগ্ম জনাউছ ভনে সেট $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ লে যুগ্ম $GL_2(\mathbb{R})$ কো উপগ্রুপ হো ভনী প্রমাণ গর।

- (b) Prove that order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. 6

প্রমাণ কর যে, একটি সীমিত group-এর প্রতিটি subgroup ক্রমটি group-এর ক্রমটির একটি বিভাজক।
 এডটা সিমিত যুগ্মকো প্রত্যেক উপগ্রুপকো order, যুগ্মকো order কো ভাজক হো ভনী প্রমাণ গর।

- (c) Find a basis and dimension of the subspace W of \mathbb{R}^3 , where 6

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

\mathbb{R}^3 -র subspace W এর basis and dimension খোজ, যেখানে

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

\mathbb{R}^3 কো উপ space $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ কো basis অনি dimension নির্ণয় গর।

- (d) Let (G, \circ) be a group. Prove that a non-empty subset H of G forms a subgroup of (G, \circ) if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$. 6

ধরি G একটি group। প্রমাণ কর G -এর একটি non-empty উপসেট H , (G, \circ) -এর একটি subgroup গঠন করে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$.

মানো (G, \circ) এডটা যুগ্ম হো। G কো এডটা non-empty উপসেট H লে উপগ্রুপ form গছ যদি অনি যদি মাত্র $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ হুন্ড ভনী প্রমাণ গর।

- (e) A linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is defined by 6

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z) \quad \text{for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Find the matrix of T relative to the ordered basis $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$.

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, একটি রৈখিক অপেক্ষক যা

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$ একটি ordered basis-এর সাপেক্ষে T -এর ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

এতটা linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ को लागी, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$ द्वारा परिभाषित छ । क्रमबद्ध basis $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$ को सापेक्षमा T को म्याट्रिक्स निर्णय गर ।

- (f) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6

দেখাও যে একটি cyclic group-এর প্রতিটি subgroup, cyclic হয়।

Cyclic গ্রুপকো প্রত্যেক উপগ্রুপ cyclic হো ভনী প্রমাণ কর ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কোন দুই প্রশ্নকো উত্তর দেও :

- (a) (i) Let (G, \circ) be a finite semigroup in which both the cancellation laws hold. Then show that (G, \circ) is a group. 6

ধরো (G, \circ) এমন একটি semigroup যেখানে উভয় cancellation নীতি প্রযোজ্য। তবে দেখাও যে (G, \circ) একটি group হবে।

মানো (G, \circ) এতটা সিমিত অর্ধ গ্রুপ হো জস্মা দুই cancellation को नियम राख्छ । (G, \circ) एतटा ग्रुप हो भनी प्रमाण कर ।

- (ii) If (G, \circ) is a group in which $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ and $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ for all $a, b \in G$, then show that G is abelian. 6

যদি (G, \circ) এমন একটি group যার মধ্যে সমস্ত a, b এর জন্য $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ এবং $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ প্রযোজ্য হয়, তবে দেখাও যে (G, \circ) একটি abelian group হবে।

যদি (G, \circ) এতটা গ্রুপ হয় জহাঁ $\forall a, b \in G, (a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ অনি $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ हुन्छ भने G abelian हो भनी प्रमाण कर ।

- (b) (i) State and prove Fermat's Little theorem. 6

Fermat's Little উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং প্রমাণ কর।

Fermat को Little theorem उल्लेख अनि प्रमाण कर ।

- (ii) Let H and K be two subgroups of a group G . Show that HK is a subgroup of G iff $HK=KH$. 6

ধরে নাও 'H' এবং 'K' হল 'G'-এর দুটো Subgroup। প্রমাণ কর যে, HK হল G -এর একটি Subgroup যদি এবং কেবলমাত্র যদি $HK=KH$ ।

মাননীয় H ও K , G কো দুই উপগ্রুপ হরু হো। G কো এডটা উপগ্রুপ HK হো যদি অনি যদি মাত্র $HK=KH$ হুন্ড ভনী প্রমাণ গর।

- (c) (i) Show that the set of vectors $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ is linearly dependent in \mathbb{R}^4 . Find a linearly independent subset S_1 of S such that $L(S_1) = L(S)$. 6

দেখাও যে, $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ ভেক্টরের সেটটি \mathbb{R}^4 -এ রৈখিক ভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)। S -এর মধ্যে থেকে একটি রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল উপসেট S_1 কে খুঁজে বের কর যাতে $L(S_1) = L(S)$ হবে।

প্রমাণ গর সদিশহরু কো সেট $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ linearly dependent \mathbb{R}^4 মা চ। S কো linearly independent উপসেট S_1 নির্ণয় গর জহাঁ $L(S_1) = L(S)$ ।

- (ii) Determine the linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, that maps the basis vectors $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ of \mathbb{R}^3 to the vectors $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$ respectively. 6

একটি রৈখিক অপেক্ষক $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ নির্ণয় কর যা \mathbb{R}^3 -এর basis ভেক্টর $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ গুলিকে যথাক্রমে $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$ কে সূচিত করে।

\mathbb{R}^3 কো basis সদিশহরু $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ লে $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$ সদিশহরুলাই ক্রমসংগলে map গর্নে linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ নির্ণয় গর।

- (d) (i) Show that any two bases of a finite dimensional vector space V have the same number of vectors. 6

দেখাও যে, একটি সসীম মাত্রিক (dimension) vector space V -এর যেকোন দুটি basis-এ একই সংখ্যক ভেক্টর রয়েছে।

সিমিত dimensional সদিশ মণ্ডল V কো কুনৈ দুই bases কো সমান সংখ্যাকো সদিশহরু হুন্ড ভনী প্রমাণ গর।

- (ii) Let T be a linear mapping on \mathbb{R}^3 defined by 6

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$$

Show that T is invertible and find T^{-1} .

$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত \mathbb{R}^3 -এ T একটি রৈখিক ম্যাপিং ধরা হল। দেখাও যে, T বিপরীতমুখী (invertible) এবং T^{-1} সন্ধান কর।

যদি $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ লে পরিभाषিত T এডটা \mathbb{R}^3 মা भएको linear mapping भए T invertible हो भनी प्रमाण गर अनि T निर्णय गर।

—x—



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2023

DSE1/2/3-P1-MATHEMATICS

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

DSE-1A

MECHANICS

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any **four** questions: 3×4 = 12
নিম্নলিখিত যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
কুনে **চার** প্রশ্নকা উত্তর দেऊঃ
- (a) Define Astatic equilibrium.
Astatic equilibrium-র সংজ্ঞা দাও।
অস্থির সন্তুলনকো পরিभाषा देऊ।
- (b) State the forces which will appear in the equation of virtual work.
Virtual work समीकरणेउर उपस्थित बलसमूह वर्णना कर।
भर्चुअल कामको समीकरणमा देखा पर्ने बलहरू उल्लेख गर।
- (c) State the conditions of equilibrium of a system of forces acting on a body.
एकटि बस्तुर उपर प्रयुक्त बलतन्त्रेउर जन्य ताहार साम्यावस्थाय थाकार शर्तगुलि वर्णना कर।
एउटा बडीमा प्रभाव पार्ने बलहरूको प्रणाली को सन्तुलन हुने शर्तहरू उल्लेख गर।
- (d) Explain the term 'Artificial Satellite of the Earth'.
पृथिवीर कृत्रिम उपग्रह बलते कि बोवा ?
'पृथ्वीको बनावटी उपग्रह' बारे व्याख्या गर।

- (e) Find the length of a simple equivalent pendulum for a circular disc of radius a , the axis being a tangent to the disc.

একটি a ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার চাকতি এবং চাকতির স্পর্শক বরাবর অক্ষরেখা ধরে একটি সরল সমতুল্য দোলকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

त्यासार्ध a भएको गोलाकार डिस्क को लागि साधारण equivalent पेंडुलम्को लम्बाइ निर्णय गर, अक्ष डिस्कको स्पर्श रेखा हो।

- (f) Find the moment of inertia of a uniform rod of length $2a$ with respect to an axis, perpendicular to the rod and through its middle point.

একটি $2a$ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দণ্ডের মধ্যবিন্দুগামী এবং উহার সহিত উলম্বভাবে দণ্ডায়মান অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক নির্ণয় কর।

रडको मध्य बिन्दुबाट गएको र रड संग लम्बवत भएको अक्षको सापेक्षमा लम्बाइ $2a$ भएको त्यस समान रडको inertia को moment पत्ता लगाऊ।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন **চার** প্রশ্নের উত্তর দেও:

- (a) A particle describes an ellipse of eccentricity e about a centre of force at a focus. When the particle is at one end of a major axis its velocity is doubled. Prove that the new path is a hyperbola of eccentricity $\sqrt{9-8e^2}$.

e উৎকেন্দ্রতা বিশিষ্ট কোন একটি নাভি-অভিমুখী কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে চলমান। কণাটি পরাক্ষের একপ্রান্তে পৌঁছলে ইহার গতিবেগ দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর নতুন কক্ষপথটি $\sqrt{9-8e^2}$ উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট পরাবৃত্ত।

ফোকসমা এডটা কণাৰে বলকো কেন্দ্ৰকো সাপেক্ষমা eccentricity e भएको अण्डावृत्त वर्णन गर्छ। Major अक्षको एक छेउमा कणको वेग दुई गुना हुन्छ। नयाँ path, eccentricity $\sqrt{9-8e^2}$ भएको हाइपरबोला हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (b) Write down the equation of motion relative to the centre of inertia.

জড়তা বিন্দু (Centre of inertia) এর সাপেক্ষে গতির সমীকরণটি উল্লেখ কর।

Inertia को केन्द्रको सापेक्षमा गतिको समीकरण लेख।

- (c) State and prove the Principle of Virtual Work.

Virtual Work-এর নীতিটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

भर्चुअल कामको सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर।

- (d) A force P acts along the axis of x and another force nP acts along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$. Show that the central axis lies on the cylinder

$$n^2(nx-1)^2 + (1+n^2)^2 y^2 = n^4 a^2$$

একটি বল P , x অক্ষ বরাবর এবং অপর একটি বল nP , $x^2 + y^2 = a^2$ চোঙের একটি generator বরাবর কাজ করে। দেখাও যে কেন্দ্রীয় অক্ষটি (Central axis) $n^2(nx-1)^2 + (1+n^2)^2 y^2 = n^4 a^2$ চোঙের অবস্থান করে।

এুটা বল P লে অক্ষ সঁগে প্রভাব পাৰ্চ অনি আৰ্কো বল nP লে সিলিন্ডর $x^2 + y^2 = a^2$ কো generator সঁগে প্রভাব পাৰ্চ । কেন্দ্রীয় কক্ষ সিলিন্ডর $n^2(nx-1)^2 + (1+n^2)^2 y^2 = n^4 a^2$ মা চ ভনী প্রমাণ গর ।

(e) Find the minimum time of Oscillation of a Compound Pendulum.

সমতুল্য দোলকের সর্বনিম্ন দোলনকাল নির্ণয় কর।

এুটা যৌগিক পঁডুলমকো দোলন্ (Oscillation) হুনৈ ন্যূনতম সময় নির্ণয় গর ।

(f) State and Prove D'Alembert's Principle.

D'Alembert-এর নীতিটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

D'Alembert কো সিদ্ধান্ত উল্লেখ অনি প্রমাণ গর ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any **two** questions from the following:

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কুনৈ দুই প্রশ্নকা উত্তর দেউ :

(a) (i) A square lamina rests with its plane perpendicular to a smooth wall, one corner being attached to a point in the wall by a fine string of length equal to the side of the square. Find the position of equilibrium and show that it is stable.

8+4

একটি বর্গাকার পাতকে (square lamina) একটি মসৃণ দেওয়ালের সহিত উল্লম্বভাবে এমনভাবে রাখা হয়েছে যেখানে পাতের একটি কোণ (Corner) দেওয়ালের একটি বিন্দুর সহিত উক্ত বর্গাকার পাতের বাহুর সহিত সমান একটি সূক্ষ্ম (fine) দড়ির সাহায্যে যুক্ত। তাহলে উক্ত বর্গাকার পাতের সাম্যের (equilibrium) অবস্থান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে স্থিতিবস্থায় (stable) রয়েছে।

এুটা বর্গাকার লেমিনা আফনো সমতললাই চিল্লো পর্ত্রালসঁগ লম্ববত রাস্ত্ত । ত্যসকো এক চ্চউ বর্গাকারকো সাইড জনা লম্বাই ধকো তারলে পর্ত্রাল সঁগ এুটা বিন্দুমা জাউকো চ । সন্তুলনকো অবস্থা নির্ণয় গর র ত্যসকো স্থিথরতা দেখ্রাক ।

(ii) State and prove the principle of conservation of energy under impulsive force.

ঘাত বল (Impulsive force)-এর অধীনস্থ শক্তির নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

আবেগাত্মক বলহরু অন্তর্গত্ ঊর্জাকো সংরক্ষণকো সিদ্ধান্ত উল্লেখ অনি প্রমাণ গর ।

(b) (i) Deduce the condition of stability of an orbit which is nearly circular under the action of a central force $F = \phi(u)$, where $u = \frac{1}{r}$.

6+6

$F = \phi(u)$ যেখানে $u = \frac{1}{r}$ কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে প্রায় গোলাকার কোন কৃষ্ণপথের স্থিতিশীলতার শর্তগুলি উল্লেখ কর।

केन्द्रीय बल $F = \phi(u)$, जहाँ $u = \frac{1}{r}$ को प्रभाव अन्तर्गत लगभग गोलाकार भएको कक्षको स्थिरताको अवस्था अनुमान गर ।

- (ii) Obtain the velocity and acceleration of a moving particle referred to rectangular axes OX and OY which are not fixed in space but rotate about the origin in their own plane.

शून्ये स्थयी नय किन्तु मूलबिन्दुर सापेक्षे निजस्व तले घुम्ते सम्म आयतक्षेत्राकार अक्षद्वय OX एवं OY -एर सापेक्षे कोन एकटि चलमान कणार गतिवेग एवं त्वरण निर्णय कर ।

Space मा fix नभएको तर आफ्नै समतलको उत्पत्ति का परिक्रमा गर्ने आयताकार अक्षहरू OX र OY मा उल्लेखित एउटा चलने कणको वेग र प्रवेग निर्णय गर ।

- (c) (i) State and prove the principle of conservation of Moment or Angular Momentum. 6+6

Moment वा Angular Momentum-एर नित्यता सूत्रटि विवृत कर एवं प्रमाण कर ।

Moment अथवा कोणीय Momentum को संरक्षणको सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर ।

- (ii) Prove that in a Central orbit, the sectorial area traced out by the radius vector through the centre of force to the particle per unit time is constant.

प्रमाण कर केन्द्रीय कक्षपथे गतिशील कोन कणार उपर केन्द्रीय बल बराबर व्यासार्ध भेक्टरटि एकक समये ये क्षेत्रटि गमन करे ता ध्रुवक हय ।

एउटा केन्द्रीय कक्षमा सदिश भेक्टर द्वारा बलको केन्द्रबाट कणको प्रति एकाइ समयको बिचमा निकालिएको क्षेत्रीय क्षेत्र स्थिरांक हुन्छ भनी प्रमाण गर ।

- (d) (i) Let AB be a rod with two different weights W_a and W_b are suspended from two ends respectively. If AB makes an angle θ with the vertical, then prove 6+6

$$\text{that } \tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} .$$

धर AB एकटि रड यार दुई प्रांते दुटि भिन्न ओजन W_a एवं W_b ढोलानो आछे । उलम्बेर साथे

$$AB \text{ रडटि } \theta \text{ कोण करले प्रमाण कर } \tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} .$$

मानौ AB दुई भिन्न ओजन W_a र W_b भएको रड हो जो क्रमै संगले दुई छेउमा झुण्डाएको छ ।

$$\text{यदि } AB \text{ ले vertical संग कोण } \theta \text{ बनाउछ भने प्रमाण गर, } \tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} .$$

- (ii) Find the moment of Inertia of a rigid body about any line, given the moments and products of inertia about three perpendicular axes.

एकटि line-एर सापेक्षे एकटि दृढ वस्तु (Rigid body) जडता आंमक (Moment of Inertia) निर्णय कर, येखाने तिनटि अक्षे सापेक्षे Moments एवं Products of inertia देओया आछे ।

कुनै रेखामा ठोस् बडी की inertia को moment पत्ता लगाऊ, जहाँ तिन लम्बवत अक्षहरूको सन्दर्भमा moment र inertia को गुणन दिइएको छ ।

DSE-1B

GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

GROUP-A / विभाग-क / समूह-क

1. Answer any **four** questions from the following: 3×4 = 12
- निम्नलिखित ये-कौन **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए:
कुनै **चार** प्रश्नहरूको उत्तर देऊ।
- (a) Prove that if every element of a group G is its own inverse, then it is an abelian group. 3
प्रमाण करे, यदि एकटा ग्रुप (group) प्रत्येक उपादान तार निजसब inverse হয়, তবে সেটি একটি abelian group হবে।
यदि ग्रुप G को प्रत्येक element यसको आफ्नै inverse हो भने, यो एउटा abelian ग्रुप हो भनी प्रमाण गर।
- (b) In a group G , a is an element of order 30, then find the order of a^{18} . 3
एकटा group G ते, a हल एकटा उपादान यार क्रम 30, तारपर a^{18} -एर क्रम खोज।
ग्रुप G मा a order 30 भएको एउटा element हो भने a^{18} को order निर्णय गर।
- (c) Check whether the set $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$ is a subspace of \mathbb{R}^3 or not. 3
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ सेटि \mathbb{R}^3 -एर एकटा सबस्पेस किना ता परीक्षा कर।
सेट $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$ \mathbb{R}^3 को subspace हो वा होइन जाँच गर।
- (d) Show that a Linear mapping $T : V \rightarrow W$ is injective iff $\ker T = \{\theta_V\}$. 3
देखाओ ये एकटा रैखिक म्यापिंग $T : V \rightarrow W$ injective यदि एवं शून्यमात्र यदि $\ker T = \{\theta_V\}$ ।
Linear mapping $T : V \rightarrow W$ injective हो यदि अनि यदि मात्र $\ker T = \{\theta_V\}$ भनी प्रमाण गर।
- (e) Prove that intersection of two subgroups of a group is a subgroup. 3
प्रमाण करे, एकटा group-एर दुटा subgroup-एर हेदओ एकटा subgroup হবে।
ग्रुपको दुईवटा उपग्रुप को प्रतिच्छेदन एउटा ग्रुपले हो भनी प्रमाण गर।
- (f) Find all generators of the cyclic group generated by the 7th roots of unity. 3
1-एर 7th तम बीज द्वारा उৎपन्न करा एकटा 'cyclic group'-एर समस्त 'generators' खोज।
Unity को 7th root बाट उत्पन्न भएको cyclic ग्रुप का सबै generator हरू को निर्णय गर।

GROUP-B / विभाग-ख / समूह-ख

2. Answer any **four** questions from the following: 6×4 = 24
- निम्नलिखित ये-कौन **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए:
कुनै **चार** प्रश्नहरूको उत्तर देऊ :
- (a) Let $GL_2(\mathbb{R})$ denote the group of all 2×2 non-singular matrices over \mathbb{R} w. r. t. 6
matrix multiplication. Show that the set $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ forms a
sub-groups of $GL_2(\mathbb{R})$.

ধর $GL_2(\mathbb{R})$ একটি group যেটি \mathbb{R} -এর উপর সমস্ত 2×2 non-singular matrix-এর সংগ্রহ যা matrix গ্রুপ এর সাপেক্ষে group হয়। দেখাও যে, এই সেট $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ -টি $GL_2(\mathbb{R})$ এবং একটি 'Subgroup' গঠন করে।

যদি $GL_2(\mathbb{R})$ লে ম্যাট্রিক্স গুণনকো সন্দর্ভমা \mathbb{R} মা সবে 2×2 non-singular ম্যাট্রিক্সহরুকো যুপ জনাউঁচু ভনে সেট $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$ লে যুপ $GL_2(\mathbb{R})$ কো উপযুপ হো ভনী প্রমাণ গর।

- (b) Prove that order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. 6

প্রমাণ কর যে, একটি সীমিত group-এর প্রতিটি subgroup ক্রমটি group-এর ক্রমটির একটি বিভাজক।

এতটা সিমিত যুপকো প্রত্যেক উপযুপকো order, যুপকো order কো ভাজক হো ভনী প্রমাণ গর।

- (c) Find a basis and dimension of the subspace W of \mathbb{R}^3 , where 6

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

\mathbb{R}^3 -র subspace W এর basis and dimension খোজ, যেখানে

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

\mathbb{R}^3 কো উপ space $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ কো basis অনি dimension নির্ণয় গর।

- (d) Let (G, \circ) be a group. Prove that a non-empty subset H of G forms a subgroup of (G, \circ) if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$. 6

ধরি G একটি group। প্রমাণ কর G -এর একটি non-empty উপসেট H , (G, \circ) -এর একটি subgroup গঠন করে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$.

মান্নৌ (G, \circ) এতটা যুপ হো। G কো এতটা non-empty উপসেট H লে উপযুপ form গঠ যদি অনি যদি মাত্র $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ হুঁচু ভনী প্রমাণ গর।

- (e) A linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is defined by 6

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z) \text{ for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Find the matrix of T relative to the ordered basis $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$.

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, একটি রৈখিক অপেক্ষক যা

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$ একটি ordered basis-এর সাপেক্ষে T -এর ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

এতটা linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ কো লাগী, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$ দ্বারা পরিभाषিত চ। ক্রমবদ্ধ basis $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)\}$ কো সাপেক্ষমা T কো ম্যাট্রিক্স নির্ণয় গর।

- (f) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6

দেখাও যে একটি cyclic group-এর প্রতিটি subgroup, cyclic হয়।

Cyclic যুপকো প্রত্যেক উপযুপ cyclic হো ভনী প্রমাণ গর।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কোন দুই প্রশ্নের উত্তর দেও :

(a) (i) Let (G, \circ) be a finite semigroup in which both the cancellation laws hold. Then show that (G, \circ) is a group. 6

ধরো (G, \circ) এমন একটি semigroup যেখানে উভয় cancellation নীতি প্রযোজ্য। তবে দেখাও যে (G, \circ) একটি group হবে।

মানো (G, \circ) এতটা সিমিত অর্ধ গ্রুপ হো জস্মা দুই cancellation কো নিয়ম রাখ্ত। (G, \circ) এতটা গ্রুপ হো ভনী প্রমাণ গর।

(ii) If (G, \circ) is a group in which $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ and $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ for all $a, b \in G$, then show that G is abelian. 6

যদি (G, \circ) এমন একটি group যার মধ্যে সমস্ত a, b এর জন্য $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ এবং $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ প্রযোজ্য হয়, তবে দেখাও যে (G, \circ) একটি abelian group হবে।

যদি (G, \circ) এতটা গ্রুপ হয় জহাঁ $\forall a, b \in G$, $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ অনি $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ হুন্ত ভনী G abelian হো ভনী প্রমাণ গর।

(b) (i) State and prove Fermat's Little theorem. 6

Fermat's Little উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং প্রমাণ কর।

Fermat কো Little theorem উল্লেখ অনি প্রমাণ গর।

(ii) Let H and K be two subgroups of a group G . Show that HK is a subgroup of G iff $HK = KH$. 6

ধরে নাও 'H' এবং 'K' হল 'G'-এর দুটো Subgroup। প্রমাণ কর যে, HK হল G -এর একটি Subgroup যদি এবং কেবলমাত্র যদি $HK = KH$ ।

মানো H র K , G কো দুই উপগ্রুপ হরু হো। G কো এতটা উপগ্রুপ HK হো যদি অনি যদি মাত্র $HK = KH$ হুন্ত ভনী প্রমাণ গর।

(c) (i) Show that the set of vectors $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ is linearly dependent in \mathbb{R}^4 . Find a linearly independent subset S_1 of S such that $L(S_1) = L(S)$. 6

দেখাও যে, $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ ভেক্টরের সেটটি \mathbb{R}^4 -এ রৈখিক ভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)। S -এর মধ্যে থেকে একটি রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল উপসেট S_1 কে খুঁজে বের কর যাতে $L(S_1) = L(S)$ হবে।

প্রমাণ গর সদিহাহরু কো সেট $S = \{(1, 2, 3, 0), (2, 1, 0, 5), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ linearly dependent \mathbb{R}^4 মা চ। S কো linearly independent উপসেট S_1 নির্ণয় গর জহাঁ $L(S_1) = L(S)$ ।

- (ii) Determine the linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, that maps the basis vectors $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ of \mathbb{R}^3 to the vectors $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ respectively. 6

একটি রৈখিক অপেক্ষক $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ নির্ণয় কর যা \mathbb{R}^3 -এর basis ভেক্টর $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ গুলিকে যথাক্রমে $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ কে সূচিত করে।

\mathbb{R}^3 को basis सदिशहरू $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ ले $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ सदिशहरूलाई क्रमैसंगले map गर्ने linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ निर्णय गर।

- (d) (i) Show that any two bases of a finite dimensional vector space V have the same number of vectors. 6

দেখাও যে, একটি সসীম মাত্রিক (dimension) vector space V -এর যেকোন দুটি basis-এ একই সংখ্যক ভেক্টর রয়েছে।

सिमित dimensional सदिश मण्डल V को कुनै दुई bases को समान संख्याको सदिशहरू हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ii) Let T be a linear mapping on \mathbb{R}^3 defined by 6

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$$

Show that T is invertible and find T^{-1} .

$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত \mathbb{R}^3 -এ T একটি রৈখিক ম্যাপিং ধরা হল। দেখাও যে, T বিপরীতমুখী (invertible) এবং T^{-1} সন্ধান কর।

यदि $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ ले परिभाषित T एउटा \mathbb{R}^3 मा भएको linear mapping भए T invertible हो भनी प्रमाण गर अनि T निर्णय गर।

—x—