



‘সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী’

**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**  
B.Sc. Programme 1st Semester Examination, 2022

**DSC1/2/3-P1-MATHEMATICS****CALCULUS AND GEOMETRY**

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.***GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক**1. Answer any **four** questions of the following:

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख -

(a) Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$

মান বের করঃ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$  को मान निर्णय गर।

(b) If  $u = \sin \alpha x + \cos \alpha x$ . Show that  $u_n = \alpha^n \{1 + (-1)^n \sin 2\alpha x\}^{1/2}$ .

যদি  $u = \sin \alpha x + \cos \alpha x$  হয়, তাহলে দেখাও যে,  $u_n = \alpha^n \{1 + (-1)^n \sin 2\alpha x\}^{1/2}$ ।

যদি  $u = \sin \alpha x + \cos \alpha x$  भए, देखाऊ  $u_n = \alpha^n \{1 + (-1)^n \sin 2\alpha x\}^{1/2}$ ।

(c) Find the area of the curve,  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ .

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$  এই বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বক্র  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$  को क्षेत्रफल निकाल।

(d) If  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ , where ‘n’ is a positive integer, prove that  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ , for

$n > 2$ .

যদি  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  হয় যেখানে ‘n’ হল একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে প্রমাণ কর

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  যেখানে  $n > 2$ ।

एउटा धनात्मक पूर्णांक ‘n’ को लागि यदि  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  भए,  $n > 2$  को लागि

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  हुन्छ भनी देखाऊ।

- (e) Find the angle of rotation of the axes for which the equation  $x^2 - y^2 = a^2$  will reduce to  $xy = c^2$ . Determine  $c^2$ .

অক্ষের ঘূর্ণন কোণের মান বের করার জন্য  $x^2 - y^2 = a^2$  সমীকরণটি  $xy = c^2$  সমীকরণে রূপান্তরিত হবে।  $c^2$ -এর মান বের কর।

সমীকরণ  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $xy = c^2$  মা পরিণত হুদা, অক্ষহরু ঘুমেকো কোণ নির্ণয় गर।  $c^2$  को मान पनि निर्णय गर।

- (f) If  $y = e^{m \sin^{-1} x}$ , show that  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ .

यदि  $y = e^{m \sin^{-1} x}$  হয়, তাহলে দেখাও যে  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ ।

यदि  $y = e^{m \sin^{-1} x}$  भए, प्रमाण गर  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ .

**GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ**

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নহরুকো উত্তর লেখ -

- (a) Find  $a, b$  in order that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$ .

यदि  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$  হয়, তাহলে  $a$  এবং  $b$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$  भए,  $a, b$  को मान निर्णय गर।

- (b) If  $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ , prove that  $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ .

यदि  $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$  হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

यदि  $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$  भए,  $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$  हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (c) If  $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x dx$ , ( $n > 2$ ), then prove that  $(n + 1)I_n + (n - 1)I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ .

यदि  $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x dx$ , ( $n > 2$ ) হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে  $(n + 1)I_n + (n - 1)I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ .

यदि  $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x dx$ , ( $n > 2$ ) भए, प्रमाण गर  $(n + 1)I_n + (n - 1)I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ ।

- (d) Find the asymptotes of the curve  $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ .

$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$  এই বক্ররেখার Asymptotes বের কর।

বক্র  $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$  को एसिम्प्टोट निर्णय गर।

- (e) Show that the spheres  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$  and  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$  touch each other externally. Find the point of contact.

দেখাও যে  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$  এবং  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$  এই গোলকদ্বয় পরস্পরকে বাইরের দিকে স্পর্শ করেছে। উক্ত গোলকদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

অণ্ডাকর বৃত্তরূপে  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$  অনি  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$  একাকী লাই হুন্ট মনী প্রমাণ কর।

- (f) Trace the curve :  $(x+3)(x^2 + y^2) = 4$ .

$(x+3)(x^2 + y^2) = 4$  এই বক্ররেখাটি অঙ্কন (Trace) কর।

বক্র  $(x+3)(x^2 + y^2) = 4$  কো চিত্র বনাও।

### GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কোন দুইঘটা প্রশ্নের উত্তর লেখ -

- (a) (i) Find a reduction formula for  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , where  $m, n \in \mathbb{N}$ . Hence find 6+2

a reduction formula for  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$ .

$\int \sin^m x \cos^n x dx$  -এর হ্রাস সূত্র (reduction formula) বের কর যেখানে  $m, n \in \mathbb{N}$ .

অতঃপর  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$  -এর হ্রাস সূত্র (reduction formula) বের কর।

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  কো লাগী reduction সূত্র নির্ণয় কর। ত্যস পচ্চি

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$  কো reduction সূত্র নির্ণয় কর।

- (ii) If  $y = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$ , then find  $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$  at  $x = 0$ . 4

যদি  $y = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$  হয়, তাহলে  $x = 0$  বিন্দুতে  $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$  -এর মান নির্ণয় কর।

যদি  $y = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$  ময়,  $x = 0$  মা  $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$  কো মান নির্ণয় কর।

- (b) (i) Find the nature of the conic  $r = \frac{2}{4 + \cos \theta}$  and also find the equation of directrices. 6

$r = \frac{2}{4 + \cos \theta}$  এই conic-এর nature নির্ণয় কর এবং নিয়ামকের (directrix) সমীকরণ নির্ণয় কর।

কোনিক  $r = \frac{2}{4 + \cos \theta}$  কো প্রকৃতি নির্ণয় কর অনি directrices কো মান পনি নির্ণয় কর।

- (ii) Find the equation of the sphere for which the circle  $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ ,  $2x + 3y + 4z = 8$  is a great circle. 6
- গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যেখানে  $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ ,  $2x + 3y + 4z = 8$  এই বৃত্তটি একটি great বৃত্ত।
- বৃত্ত  $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ ,  $2x + 3y + 4z = 8$  এতটা বৃহত্ত বৃত্ত মনে অণ্ডা বৃত্তকো সমীকরণ নির্ণয় কর।
- (c) (i) Discuss the nature of the conic  $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$  and reduce it to its canonical form. 6
- $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$  এই conic-টির nature সম্পর্কে আলোচনা কর এবং এটির canonical form তে reduce করে দেখাও।
- কোনিক  $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$  কো প্রকৃতি চলফল গর্দেঁ यसलरई canonical रूपमा परिणत गर।
- (ii) Find the volume of the solid obtained by revolving the cycloid  $x = a(\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a(1 + \cos \theta)$  about its base. 6
- $x = a(\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a(1 + \cos \theta)$  এই Cycloid-টি উহার পাদদেশের সাপেক্ষে আবর্তের ফলে যে ঘনবস্তুটি পাওয়া যাবে তার আয়তন নির্ণয় কর।
- आधरको अडरनमा एतटा सरइक्लरइड  $x = a(\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a(1 + \cos \theta)$  लरई घुमरईदर परएको ठरस् को मरत्रर (volume) निर्णय गर।
- (d) (i) Prove that the curves  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ ,  $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$  cut orthogonally if  $a - b = a' - b'$ . 6
- প্রমাণ কর  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ ,  $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$  বক্ররেখাদ্বয় orthogonally ছেদ করবে যদি  $a - b = a' - b'$  হয়।
- वक्रहरू  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$  अनि  $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$  लम्बवत् रूपमा (orthogonally) काटिन्छ यदि  $a - b = a' - b'$  प्रमाण गर।
- (ii) If  $y = x^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), then show that  $y_n = 2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)] x^n$ . 6
- यदि  $y = x^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) হয়, তহলে দেখাও যে  $y_n = 2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)] x^n$ .
- यदि  $y = x^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) मए, प्रमाण गर,  $y_n = 2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)] x^n$ ।

—x—