'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 3rd Semester Examination, 2022

DSC1/2/3-P3-MATHEMATICS

REAL ANALYSIS

Time Allotted: 2 Hours　　　　Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A
বিভাগ-ক
समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12

যে-কোনো ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख।

(a) Define supremum and infimum of a set and find sup A and inf A where

$$A=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}: m,\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

একটি সেটের 'supremum'এবং 'infimum'-এর সংজ্ঞা দাও এবং 'sup A' এবং 'inf A' নির্ণয় করো যেখানে $A=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}: m,\, n\in\mathbb{N}\right\}$

supremum अनि infimum को परिभाषा लेख अनि $A=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}: m,\, n\in\mathbb{N}\right\}$ को sup A अनि inf A को मान निकाल।

(b) Show that $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}\ (x<y)$ there exists an irrational number s such that $x<s<y$.

সমস্ত $x,\ y\in\mathbb{R}\,(x<y)$ -এর জন্য দেখাও যে অন্ততপক্ষে একটি অমূলদ সংখ্যা 's' পাওয়া যাবে যাতে $x<s<y$.

सबै $x,\ y\in\mathbb{R}\ (x<y)$ को लागी त्यहाँ irrational संख्या s अवस्थित छ जो $x<s<y$ छ।

(c) Prove that union of finite number of closed sets in $\mathbb{R}$ is a closed set.

প্রমাণ করো যে, বন্ধ সেট (closed set)-এর সসীম সংখ্যার ইউনিয়ন একটি বন্ধ সেট (closed set) হবে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে।

$\mathbb{R}$ मा closed सेटहरूको सिमीत संख्याहरूको union एउटा closed सेट हो भनी प्रमाण गर।

(d) Show that the series

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

does not converges.

দেখাও যে, $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$ এই শ্রেণী (series)-টি অভিসারী শ্রেণী হবে না।

श्रृंखला $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$ अभिकेन्द्रित हुदैन भनी प्रमाण गर।

(e) Prove that $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

প্রমাণ করো যে, $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) Determine the nature of the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

প্রকৃতি নির্ধারণ করো এই $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ শ্রেণীর (series)

श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ को प्रकृति निर्णय गर।

GROUP-B
বিভাগ-খ
समूह-ख

Answer any *four* questions 6×4 = 24

যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै <u>चार</u> प्रश्नहरूको उत्तर लेख

2. (a) Use Cauchy's root test to investigate the nature of the series 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2}\right)^n}{n^{n+1}}$$

'Cauchy's root test'ব্যবহার করে, এই $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2}\right)^n}{n^{n+1}}$ শ্রেণী (series)-এর প্রকৃতি নির্ণয় করো।

श्रृंखला (series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2}\right)^n}{n^{n+1}}$ को प्रकृति Cauchy को root test द्वारा निर्णय गर।

(b) Let $\sum u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...$ Find the partial sum S_n of the series $\sum u_n$. 2

ধরা যাক, $\sum u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...$ এই শ্রেণী $\sum u_n$ -এর আংশিক যোগফল (Partial Sum) S_n বের করো।

मानौ $\sum u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...$ श्रृंखला $\sum u_n$ को आंशिक योगफल (Partial Sum) निर्णय गर।

3. (a) Prove that every bounded sequence of real number has a convergent subsequence. 4

প্রমাণ করো যে, একটি বাস্তব সংখ্যার প্রতিটি আবদ্ধ অনুক্রমের (bounded sequence) একটি উপ অভিসারী অনুক্রম (convergent subsequence) থাকবে।

प्रत्येक वास्तविक संख्याको सिमाबद्ध अनुक्रम को एउटा अभिकेन्द्रित उप सिमाबद्ध अनुक्रम पाउँछ अनी प्रमाण गर।

(b) Examine the convergence of the sequence 2

$$\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3 ....$$

অনুক্রমের অভিসরণ পরীক্ষা করোঃ

$$\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3 ....$$

अनुक्रम $\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ....अभिकेन्द्रित हो अनी जाँच गर।

4. Show that if x and y are two numbers of bounded sets of real number S_1 and S_2 respectively, then prove that the set S, whose elements are of the form $x+y$ is also bounded and 6

$$\sup S_1 + \sup S_2 = \sup S$$

যদি x এবং y যথাক্রমে S_1 এবং S_2 বাস্তব আবদ্ধ সেট (real bounded set)-এর দুটি সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে সেই সেট S-এর উপাদানগুলি (elements) $x+y$ আকারের সে সীমাবদ্ধ (bounded) হবে এবং

$$\sup S_1 + \sup S_2 = \sup S .$$

यदि x अनि y क्रमै संगले S_1 अनि S_2 वास्तविक संख्याको सिमावद्ध सेटहरूको दुई संख्याहरू भए, सेट S जसको element हरू $x+y$ रूपमा छ, पनि सिमाबद्ध हुन्छ भनि प्रमाण गर अनि

$$\sup S_1 + \sup S_2 = \sup S$$

5. Prove that $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$ converges for $p>1$ and diverges for $p\le 1$. 6

প্রমাণ করো, $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$ একটি অভিসারী শ্রেণী হবে $p>1$-এর জন্য এবং $p\le 1$-এর জন্য অপসারী (divergent) শ্রেণী হবে।

$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$ $p>1$ को लागी converge गर्छ अनि $p\le 1$ को diverge गर्छ भनी प्रमाण गर।

6. Prove that K be a compact set in $\mathbb{R}$, every infinite subset of K has a limit point in K. Hence, prove that $\mathbb{R}$ is not compact. 4+2

একটি $\mathbb{R}$-এর 'compact' সেট K-এর জন্য, K-এর প্রতিটি অসীম উপসেটের একটি সীমা বিন্দু (limit point) থাকবে K-এর মধ্যে।

সুতরাং, প্রমাণ করো যে '$\mathbb{R}$' compact নয়।

प्रमाण गर $\mathbb{R}$ मा K एउटा compact सेट हो भने प्रत्येक K की उपसेट को एउटा सिमा बिन्दु K मा छ। $\mathbb{R}$ compact होइन भनी पनि प्रमाण गर।

7. (a) Prove that a sequence can have at most one limit. 2

প্রমাণ করো যে, একটি অনুক্রম (sequence)-এর সর্বাধিক একটি 'limit' থাকতে পারে।

एउटा अनुक्रमको कस्तीमा पनि एउटा limit छ भनी प्रमाण गर।

(b) State and prove Heine-Borel theorem. 4

বর্ণনা এবং প্রমাণ করো 'Heine-Borel theorem'.

Heine-Borel उपपाद्य को उल्लेख भनि प्रमाण गर।

GROUP-C

বিভাগ-গ

समूह-ग

Answer any *two* questions 12×2 = 24

যে-কোনো *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

8. (a) Show that if a series $\sum x_n$ in $\mathbb{R}$ converges then $x_n \to 0$ as $n\to\infty$. 3

যদি $\mathbb{R}$ একটি শ্রেণী (series) $\sum x_n$ অভিসারী হয়, তবে দেখাও যে $x_n \to 0$ as $n\to\infty$

यदि एउटा श्रृंखला $\sum x_n$ $\mathbb{R}$ मा converge गर्छ भने $n\to\infty$ हुँदा $x_n\to 0$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Test the convergence: 4

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\dots$$

অভিসারীতা (convergence) পরীক্ষা করোঃ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\dots$$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\dots$ को अभिकेन्द्रन् को जाँच गर।

(c) Prove that a set is closed in $\mathbb{R}$ iff it contains all its limit points. 5

প্রমাণ করো যে, একটি সেট $\mathbb{R}$-এর মধ্যে বন্ধ হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি এটি সমস্ত limit point-কে নিজের মধ্যে ধারণ করে।

प्रमाण गर एउटा सेट $\mathbb{R}$ मा closed भए यदि अनि यदि मात्र यसले सबै सिमा बिन्दुहरू आफैंमा समावेश गर्छ।

9. (a) Prove that the set $S \subseteq \mathbb{R}$ is closed iff $S' \subset S$. 4

প্রমাণ করো যে সেট $S \subseteq \mathbb{R}$ একটি বদ্ধ (closed) সেট হবে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে যদি এবং শুধুমাত্র যদি $S' \subset S$ হয়।

सेट $S \subseteq \mathbb{R}$ closed हुन्छ यदि अनि यदि मात्र $S' \subset S$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that / প্রমাণ করো / प्रमाण गर 4

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

(c) Prove that the sequence $\{(-1)^n\}$ is not a Cauchy sequence. 4

প্রমাণ করো যে, এই অনুক্রম (sequence) $\{(-1)^n\}$-টি 'Cauchy sequence' হবে না।

अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ Cauchy sequence होइन भनी प्रमाण गर।

10.(a) Find all the limit point of the set 4+2

$$S=\left\{\frac{(-1)^m}{m}+\frac{1}{n} \mid m,\, n\in \mathbb{N}\right\}$$

Is S closed? Is S an open set? Justify your answer.

$S=\left\{\frac{(-1)^m}{m}+\frac{1}{n} \mid m,\, n\in \mathbb{N}\right\}$ সেটের সমস্ত 'limit point'-গুলো বের করো। S কি বদ্ধ (closed)? S কি একটি open সেট হবে? তোমার মত যাচাই করো।

सेट $S=\left\{\frac{(-1)^m}{m}+\frac{1}{n} \mid m,\, n\in \mathbb{N}\right\}$ को सबै सिमा बिन्दुहरू खोज। के S closed हो ? के S open set हो ? आफ्नो उत्तरको न्यायोचित गर।

(b) Prove that for any $\varepsilon > 0$, there exist a natural number η such that $\frac{1}{\eta} < \varepsilon$. 4

দেখাও যে, যে কোনো $\varepsilon > 0$ -এর জন্য অন্ততপক্ষে একটি বাস্তব সংখ্যা η পাওয়া যাবে যাতে $\frac{1}{\eta} < \varepsilon$।

कुनै $\varepsilon > 0$ को लागी त्यहाँ एउटा natural संख्या η अवस्थित छ, जस्तै कि $\frac{1}{\eta} < \varepsilon$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the set of natural number ℕ is unbounded above. 2

দেখাও যে, ℕ উপরে সীমাহীন unbounded হবে।

natural संख्या ℕ को सेट माथि असीमित छ भनी प्रमाण गर।

11.(a) Show that every point in $I = [3, 7]$ is a cluster point of the set $S = I \cap Q$. 4

দেখাও যে $I = [3, 7]$-এর প্রতিটি বিন্দু সেট $S = I \cap Q$-এর একটি 'cluster point' হবে।

$I = [3, 7]$ मा प्रत्येक बिन्दु सेट $S = I \cap Q$ को cluster बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

(b) Show that the sequence $\{S_n\}$; where $S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ is convergent. 4

দেখাও যে, অনুক্রম $\{S_n\}$ যেখানে $S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ টি অভিসারী হবে।

अनुक्रम $\{S_n\}$ जहाँ $S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ convergent हो भनी प्रमाण गर।

(c) Prove that derived set of bounded set is bounded. 4

দেখাও যে বদ্ধসেট (bounded set)-এর 'derived set' টি বদ্ধ হবে।

सिमाबद्ध सेटको derived सेट, सिमाबद्ध हो भनी प्रमाण गर।

——×——