'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 1st Semester Examination, 2023

UMATMIN10001-MATHEMATICS

CLASSICAL AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12
যে-কোনো ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै ***चारवटा*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) If a be a non-zero complex number and z be any complex number, then define a^z. What is the principle value of a^z? 2+1
a একটি অশূন্য (non-zero) জটিল সংখ্যা এবং z যে কোন একটি জটিল সংখ্যা হলে a^z এর সংজ্ঞা দাও। a^z-এর মুখ্যমান কত ?
$a(a \neq 0)$ अनि z जटिल (complex) संख्याहरू भए a^z को परिभाषा देऊ । a^z को प्रमुख (principle) मान भनेको के हो ?

(b) Apply Descarte's rule of sign to find the nature of the roots of the equation
$$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$
$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করতে Descarte's rule of sign ব্যবহার করো।
समीकरण $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ को मूलहरूको प्रकृति, Descarte's rule of sign को सहायताले, निर्णय गर।

(c) Prove that zero is an eigenvalue of a singular matrix.
প্রমাণ করো যে, শূন্য হল একটি সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান।
शून्य एउटा singular मेट्रिक्सको eigen मान हो भनी प्रमाण गर।

(d) Define consistent system of equations. Show that the following system of linear equations has infinite number of solutions: 1+2
Consistent system of equations-এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, নিম্নলিখিত একমাত্রিক সমীকরণের সিস্টেমটির অসংখ্য সমাধান আছে।
समीकरणहरूको Consistent system भनेको के हो ? तलको समीकरण समूहको अनन्त समाधानहरू छन् भनी प्रमाण गरः
$$x_1 + 2x_2 = 674$$
$$3x_1 + 6x_2 = 2022$$

(e) Define rank of a matrix. Find the rank of the following matrix: 1+2
একটি ম্যাট্রিক্সের Rank-এর সংজ্ঞা দাও। নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির rank বের করোঃ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

मेट्रिक्सको Rank भनेको के हो ? मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ को rank निर्णय गर।

(f) If a, b, c, d be positive real numbers, then find the minimum value of 2+1

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$$

When does the minimum value occur?

যদি a, b, c, d ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ -এর ক্ষুদ্রতম মান বের করো।

কখন ক্ষুদ্রতম মান occur করে ?

a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ को न्यूनतम मान निर्णय गर ।

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ को न्यूनतम मान कहिले पाइन्छ ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions: 6×4 = 24

যে-কোনো ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) If $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$, then prove that $x^2-y^2=xy$. 6

যদি $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2-y^2=xy$

यदि $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$ भए, प्रमाण गरः $x^2-y^2=xy$

(b) If x, y, z are positive real numbers and $x+y+z=1$, prove that 6

যদি x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x+y+z=1$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

x, y, z धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए अनि $x+y+z=1$ भए प्रमाण गरः

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}$$

(c) Obtain a row echelon matrix which is row equivalent to 5+1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

and hence find its rank.

একটি Row-echelon matrix বের করো যা $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ এর সাথে Row সমতুল্য এবং

ইহা হইতে এই ম্যাট্রিক্সটির Rank বের করো।

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ সঁগ row equivalent হুনে এওটা row echelon মেট্রিক্স নির্ণয় গর সাথৈ ত্যসকো rank নির্ণয় গর।

(d) State Cayley-Hamilton theorem. Use it to find the inverse of the following matrix: 1+5
Cayley-Hamilton theorem-টি বিবৃত করো। এটি ব্যবহার করে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের inverse বের করোঃ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Cayley-Hamilton উপপাদ্য উল্লেখ গর । ত্যসকো সহায়তালে মেট্রিক্স $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ কো inverse নির্ণয় গর।

(e) If α, β, γ be the roots of the equation $2x^3+3x^2-x-1=0$, find the equation whose roots are $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ and $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$. 6

যদি α, β, γ, $2x^3+3x^2-x-1=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজ $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ সেটি বের করো।

α, β, γ সমীকরণ $2x^3+3x^2-x-1=0$ কো মূলহরু ভए ত্যো সমীকরণ জসকো মূলহরু $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ হুন্ছ, নির্ণয় গর।

(f) Solve by Cardan's method $x^3-3x-1=0$. Hence find $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$. 5+1

Cardan's method-এর সাহায্যে $x^3-3x-1=0$ সমীকরণটি সমাধান করো। অতঃপর $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$ -এর মান বের করো।

Cardan কো পদ্ধতিদ্বারা সমাধান গরः $x^3-3x-1=0$ সাথৈ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$ কো মান নির্ণয় গর।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any ***two*** questions: 12×2 = 24
যে-কোনো ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
কুনৈ ***দুইবটা*** প্রশ্নকা উত্তর দেऊः

(a) (i) State De Moivre's theorem for integer and rational indices. Use it to prove that, 2+6
ঋনাত্মক এবং মূলদ সূচকের জন্য De Moivre's theorem-টি বিবৃতি করো। এটি ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে,
পূর্ণসংখ্যা অনি rational indices কো নিম্তি De Moivre's theorem উল্লেখ গর । ত্যসকো সহায়তালে প্রমাণ গরः

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

(ii) Find $\mod z$ and $\arg z$ where $z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$. 2+2

$\mod z$ এবং $\arg z$ বের করো যেখানে $z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$ ।

$z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$ भए $\mod z$ अनि $\arg z$ को मानहरू निर्णय गर।

(b) (i) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন (eigen) মানগুলি ও অনুবাদ আইগেন ভেক্টরগুলি বের করো।

मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ को eigen मानहरू अनि त्यसकै अनुरूप eigen सदिशहरू निर्णय गर।

(ii) Determine all values of $(1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$ and show that their product is 8. 4+2

$(1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$-এর মানগুলি বের করো এবং দেখাও যে তাদের গুণফল হল 8।

$(1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$ को सबै मानहरू निर्णय गर अनि तिनीहरूको गुणनफल 8 हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Solve the system of linear equations given by: 6
নিচের একমাত্রিক সমীকরণের সিস্টেমটি সমাধান করোঃ
रैखिक समीकरण समूह समाधान गरः

$$2x + 4y + 6z + 4w = 4,\ 2x + 5y + 7z + 6w = 3,\ 2x + 3y + 5z + 2w = 5$$

(ii) If A and B be invertible matrices of the same order then show that AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Hence show that $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$. 4+2
যদি A এবং B সমমাত্রিক invertible ম্যাট্রিক্স হয়, তবে দেখাও যে AB invertible এবং $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$। অতঃপর দেখাও যে, $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$।
समान order भएको A अनि B invertible मेट्रिक्सहरू भए AB invertible हुन्छ अनि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर। साथै प्रमाण गरः $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$

(d) (i) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + 1 = 0$, find the equation whose roots are 6
যদি $x^3 + qx + 1 = 0$ সমীকরণের α, β, γ বীজ হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ বের করো যার বীজগুলি হল
समीकरण $x^3 + qx + 1 = 0$ को α, β, γ मूलहरू भए, त्यो समीकरण निर्णय गर जसको मूलहरू

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\ ,\ \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\ ,\ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$$

(ii) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + 1 = 0$, then prove that 2+4
যদি $x^3 + qx + 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলো α, β, γ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,
α, β, γ समीकरण $x^3 + qx + 1 = 0$ को मूलहरू भए, प्रमाण गरः

(I) $\Sigma\alpha^3 = -3$

(II) $\Sigma\alpha^5 = 5q$.

——×——