



'সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. General Part-II Examination, 2022

MATHEMATICS

PAPER-IV

INTEGRAL CALCULUS AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 50

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer question no. 1 and any *three* from the rest

১নং প্রশ্ন এবং যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও

প্রশ্ন ন. 1 অনি রহলবাট কুনৈ তীনবটা প্রশ্নকা উত্তর দেউ

1. Answer any *three* questions:

2×3 = 6

যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুনৈ তীনবটা প্রশ্নকা উত্তর দেউ :

(a) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^4 x dx$$

(b) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 7x + 10} dx$$

(c) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^1 xe^x dx$$

(d) If $f(x) = f(a+x)$, prove that $\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$

যদি $f(x) = f(a+x)$ হয়, প্রমাণ কর যে $\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$

যদি $f(x) = f(a+x)$ ভাএ, প্রমাণ কর $\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$

(e) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_{-5}^5 \frac{xe^{x^2}}{1+x^2} dx$$

4×2 = 8

2. Answer any *two* questions:

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx$$

(b) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

(c) Find the value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2} + \frac{n}{1^2 + n^2} + \frac{n}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2 + n^2} \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2} + \frac{n}{1^2 + n^2} + \frac{n}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2 + n^2} \right\} \text{-এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2} + \frac{n}{1^2 + n^2} + \frac{n}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2 + n^2} \right\} \text{কো মান প্রাপ্ত কর।}$$

3. Answer any *two* questions:

4×2 = 8

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan x}$$

(b) Prove that / প্রমাণ কর যে / প্রমাণ কর :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$$

(c) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos 2x + \sin 2x + 1} dx$$

4. (a) Find the value of $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

4+4

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{-এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{কো মান প্রাপ্ত কর।}$$

(b) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / মূল্যাঙ্কন কর :

$$\int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y) dx dy$$

5. (a) Prove that / প্রমাণ কর যে / প্রমাণ কর :

4+4

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^9 dx = 12$$

(b) Find the area of the loop of the curve $y^2 = x(x-1)^2$

$y^2 = x(x-1)^2$ বক্রের (curve) loop -এর ক্ষেত্রফল (area) নির্ণয় কর।

$y^2 = x(x-1)^2$ বক্রের লুপ (loop) কো ক্ষেত্রফল পতা लगाऊ।

6. (a) Find the volume of the solid generated by the revolution of the loop of the curve $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ about the x -axis.

4+4

x অক্ষের চতুর্দিকে $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ বক্রের ঘূর্ণনজনিত উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

$y^2(a+x) = x^2(a-x)$ বক্রের লুপ (loop) কো x -অক্ষের বারেমা পরিভ্রমণ লে উতপন্ন भएको ठोस को आयतन को मान पता लगाऊ।

(b) Find the length of the perimeter of the asteroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এই asteroid-এর পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এস্টেরোইড (asteroid) কো পরিধিকো लम्बाइ को मान पता लगाऊ।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

7. Answer any **three** questions:

5×3 = 15

যে-কোন **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै तीनवटा प्रश्नहरूका उत्तर देऊ :

(a) (i) Determine the order and degree of $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y$

1+2+2

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y$ এই অন্তরকল সমীকরণ 'Differential Equation'-এর ক্রম

(order) এবং মাত্রা (degree) বের কর।

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y$ কো ক্রম অনি ডিগ্রী (degree) নির্ধারণ কর।

(ii) Determine the differential equation, whose primitive is $y = Ae^x + Be^{-x}$, where A and B are constants.

অন্তরকল সমীকরণটি বের কর যার আদিম (primitive) টি হল $y = Ae^x + Be^{-x}$, যেখানে A এবং B হল ধ্রুবক।

विभेदक समीकरण (Differential equation) निर्धारण गर जसको आदिम (primitive) $y = Ae^x + Be^{-x}$ हो जसमा A अनि B अचर (constants) हुन्।

(iii) Verify that $y = e^x \sin 2x$ satisfies the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

যাচাই কর, $y = e^x \sin 2x$ হল $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y$ এই অন্তরকল সমীকরণের একটি সমাধান।

জাচ কর কি $y = e^x \sin 2x$ লে বিশ্বেদক সমীকরণ (Differential Equation)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$
 লাই সন্তুষ্ট (satisfies) গর্দে।

(b) Solve: / সমাধান করঃ / সমাধান কর : 5

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$$

(c) Solve: $(D^3 - 7D - 6)y = e^{2x} + x$ where $D \equiv \frac{d}{dx}$ 5

সমাধান করঃ $(D^3 - 7D - 6)y = e^{2x} + x$, যেখানে $D \equiv \frac{d}{dx}$

সমাধান কর : $(D^3 - 7D - 6)y = e^{2x} + x$, জহা $D \equiv \frac{d}{dx}$ ।

(d) Solve: / সমাধান করঃ / সমাধান কর : 5

$$4x^3 y dx + (x^4 + y^4) dy = 0$$

(e) Solve the equation $y = px + p - p^2$ and obtain the singular solution, where 5

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$y = px + p - p^2$ এই সমীকরণটি সমাধান কর। পরে এখান থেকে এটির বিশিষ্ট সমাধান (singular solution) বের কর, যেখানে $p = \frac{dy}{dx}$

$p = \frac{dy}{dx}$ ধরে সমীকরণ $y = px + p - p^2$ লাই সমাধান কর অনি একল সমাধান (singular solution) প্রাপ্ত কর।

8. Find the orthogonal Trajectories of the curve $r = a(1 + \cos \theta)$, where 'a' is a parameter. 5

$r = a(1 + \cos \theta)$ -এর বক্ররেখার গুচ্ছের লম্ব প্রক্ষেপ (Orthogonal Trajectories) পথ নির্ণয় কর, যেখানে 'a' হল একটি স্থিতিমাপ (parameter) ধ্রুবক।

$r = a(1 + \cos \theta)$ বক্রকো আয়তীয় (Orthogonal) প্রক্ষেপণহরু (Trajectories) প্রাপ্ত কর জহা 'a' এক প্রাচল (parameter) হৌ।

-----x-----