



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. General Part-II Examination, 2022

MATHEMATICS

PAPER-VI

ANALYTICAL DYNAMICS, PROBABILITY AND STATISTICS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 50

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer question no. 1 and any two from the rest

১নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্ন থেকে যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও
প্রশ্ন নং. 1 অনি রহলবাট কুনৈ দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেউ

1. (a) What is central orbit? Find the velocity at any point of a central orbit. 1+2
কেন্দ্রীয় কক্ষ কি? কেন্দ্রীয় কক্ষের কোন একটি বিন্দুতে গতিবেগের মান নির্ণয় কর।
কেন্দ্রীয় কক্ষা কে হা? কেন্দ্রীয় কক্ষাকো কুনৈ পনি বিন্দুমা বেগ পতা লগাউ।
- (b) Show that the rate of change of kinetic energy of a particle is equal to its power. 2
দেখাও যে, কোন কণার গতিশক্তির পরিবর্তনের হার ঐ কণার ক্ষমতার সমান।
এক কণাকো গতিক বল কো পরিবর্তন কো দর यसকো শক্তি (power) কো বরাবর চ্ত মনে
দেখাউ।
2. (a) If a particle of mass m be acted upon by equal constant forces mf tangentially and 7
normally to the path and if the resistance be $\frac{mfv^2}{k^2}$, prove that
$$k^2(e^{2fs/k^2} - 1) = u^2(e^{2\psi} - 1)$$

where u is the velocity of projection.
যদি m ভরের কোন একটি কণার ভ্রমণপথের স্পর্শক ও অভিলম্ব বরাবর সমান ধ্রুবক বল (constant
force) mf কাজ করে এবং যদি $\frac{mfv^2}{k^2}$ এর বাধা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$k^2(e^{2fs/k^2} - 1) = u^2(e^{2\psi} - 1)$$

যেখানে u (projection) উৎক্ষেপণের বেগ।
যদি দ্রব্যমান m কো কণলাই সমান স্থির বল (constant force) mf দ্বারা সতহী
(tangentially) র সামান্য (normally) রূপমা মার্গমা কার্য গরিন্ত অনি প্রতিরোধ $\frac{mfv^2}{k^2}$
মএ, প্রমাণ গর $k^2(e^{2fs/k^2} - 1) = u^2(e^{2\psi} - 1)$ জহাঁ u প্রক্ষেপণ কো বেগ হো।

- (b) The displacement of a moving point is given by 3

$$x = a \cos kt + b \sin kt .$$

Show that the point executes Simple Harmonic Motion.

একটি চলমান বিন্দুর সরল হলো—

$$x = a \cos kt + b \sin kt$$

তাহলে, দেখাও যে, বিন্দুটি সরল দোলগতি মেনে চলবে।

$x = a \cos kt + b \sin kt$ দ্বারা এক গতিশীল বিন্দুকে বিস্থাপন দিइएको छ, देखाउनु होस् कि बिनदुले सरल हार्मोनिक गतिलाई कार्यान्वयन गर्दछ।

3. (a) If the orbit described by a particle under a central force to the origin be $r^n \cos n\theta = a^n$, then find the law of force. 5

यदि कोन केन्द्रीय बल (central force) अधिने कोन एकटि कणार कम्फ $r^n \cos n\theta = a^n$ द्वारा बर्णित হয়, তবে बल (law of force) निर्णय कर।

यदि केन्द्रीय बल अर्न्तगत कण द्वारा उत्पत्तिको लागि वर्णन गरिएको कक्षा $r^n \cos n\theta = a^n$ भए बलको नियम पत्ता लगाऊ (law of force).

- (b) An elastic ball of mass m falls from a height h on a fixed horizontal plane and rebounds. Show that the loss of K.E. by the impact is $mgh(1-e^2)$, e being the coefficient of restitution. 5

m ভরের একটি elastic বল, h উচ্চতা থেকে স্থায়ী অনুভূমিক তলে পতিত হয় এবং প্রতিফলিত হয়। দেখাও যে, এই ঘটনার প্রভাবে গতিশক্তির হ্রাস হয় $mgh(1-e^2)$, যেখানে e হলো প্রত্যর্পণ সহগ (coefficient of restitution).

मास m को लोचदार बल (ball) निश्चित तेर्सो समतलमा h उचाइबाट स्वस्थ र पलटाव (rebound) हुन्छ। देखाउनुहोस् कि प्रभावबाट गतिज उर्जाको हानि $mgh(1-e^2)$ हो, e restitution को गुणांक हो।

4. (a) A particle describes the equiangular spiral $r = ae^\theta$ in such a manner that the radial acceleration is zero. Prove that the speed and the magnitude of acceleration are each proportional to r . 5

एकटि कण एकटि समकोणी सर्पिल (equiangular spiral) $r = ae^\theta$ एमन भावे बर्णना करे ये रेडियल त्वरण (radial acceleration) शून्य হয়। प्रमाण कर ये, द्रुति ও त्वरणे मान प्रत्येके r -एर साथे समानुपातिक।

एउटा कणले समभुज सर्पिल (equiangular spiral) $r = ae^\theta$ लाई यसरी वर्णन गर्दछ कि रेडियल गतिवर्द्धन (radial acceleration) शून्य हुन्छ। गतिवर्द्धन को गति र परिमाण r को समानुपातिक छ भनेर प्रमाण गर।

- (b) A particle falls from rest in a medium in which resistance is kv^2 per unit mass. 5

Prove that the distance fallen in time t is $\frac{1}{k} \log \cosh(t\sqrt{gk})$

स्त्रि अवस्था থেকে एकटि कण कोनो एकटि माध्यमे पतनशील, यार बाधा kv^2 प्रति एकक भरे।

प्रमाण कर ये, t समये पतित दूर $\frac{1}{k} \log \cosh(t\sqrt{gk})$

एक कण एक माध्यममा विप्रामबाट खस्छ जसमा प्रतिरोध kv^2 प्रति एकाइ द्रव्यमान हुन्छ।

प्रमाणित गर्नुहोस् कि समय t मा घटेको दूरी $\frac{1}{k} \log \cosh(t\sqrt{gk})$ हो।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer question no. 5 and any two from the rest

৫নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্ন থেকে যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

প্রশ্ন নং. 5 অনি রহলবাট কুনৈ দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেজ

5. (a) If A and B are two events such that $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$, Find $P(A^c + B^c)$. 2

যদি A এবং B দুটি ঘটনা হয় যাতে $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ এবং $P(AB) = \frac{1}{4}$, তাহলে $P(A^c + B^c)$ -এর মান নির্ণয় কর।

যদি A অনি B দুইবটা ঘটনাহরু (events) হুনু মনে $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(A^c + B^c)$ পতা লগাऊ।

- (b) Define conditional distribution. 1

শর্তাধীন নিবেশনের (conditional distribution) সংজ্ঞা দাও।

সহকারী বিতরণ (conditional distribution) পরিমাণিত গনুহোসু।

- (c) If X be a random variable with following probability distribution 2

$$\begin{array}{l} X: \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ P(X=x): \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/2 \end{array}$$

Then find $E(2X+1)$.

যদি একটি সম্ভাব্য চলক (random variable) X -এর সম্ভাবনা নিবেশন (probability distribution) নিম্নরূপ হয়

$$\begin{array}{l} X: \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ P(X=x): \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/2 \end{array}$$

তাহলে $E(2X+1)$ -এর মান নির্ণয় কর।

যদি X নিম্ন সম্ভাব্যতা বিতরণ সঁগ অনিয়মিত চর (random variable) হো মনে $E(2X+1)$ পতা লগাऊ।

$$\begin{array}{l} X: \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ P(X=x): \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/2 \end{array}$$

6. (a) Determine the value of k such that $f(x)$ defined by 3+3+1

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

is a probability density function. Find the corresponding distribution function.

Also find $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$.

k -এর মান নির্ণয় কর, যাতে $f(x)$ নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত—

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক (probability density function)। এর নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় কর (corresponding distribution function). এবং $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ -এর মান নির্ণয় কর।

k को मान निर्धारण गर्नुहोस् कि $f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित $f(x)$

एक सम्भाव्यता घनत्व प्रकार्य हो।

सम्बन्धित वितरण प्रकार्य पत्ता लगाऊ।

$P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ पनि पत्ता लगाऊ।

(b) Show that A and B are independent if and only if A^c and B^c are independent. 3

देखाओ ये, A ও B ঘটনাদ্বয় अनपेक्ष (independent) হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি A^c ও B^c ঘটনাদ্বয় अनपेक्ष হয়।

देखाउनुहोस् कि A र B स्वतन्त्र छन् यदि A^c र B^c स्वतन्त्र छन् भने मात्र।

7. (a) If X and Y are two random variables, prove that 5

यदि X ও Y দুটি সম্ভাব্য চলক (random variable) হয়, প্রমাণ কর যে,

यदि X अनि Y दुई अनियमित चर हुन् भने प्रमाणित गर्नुहोस्

(i) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(ii) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

(b) Show that the mean and variance of Poisson distribution are equal. 5

देखाओ ये, Poisson distribution-এর গড়মান (mean) ও ভেদমান (variance) সমান হয়।

Poisson वितरणको माध्य (mean) र भिन्नता (variance) बराबर छन् भनी देखाउनुहोस्।

8. (a) If X is a random variable having normal (m, σ) distribution, find the distribution of $Y = aX + b$, where a, b are constants. 5

यदि X একটি (m, σ) विशिष्ट normal distribution युक्त सम्भाव्य चलक হয়, তাহলে $Y = aX + b$ -এর distribution নির্ণয় কর। যেখানে a ও b ধ্রুবক।

यदि X सामान्य वितरण (m, σ) भएको अनियमित चर हो भने, $Y = aX + b$ को वितरण पत्ता लगाउनुहोस्, जहाँ a र b स्थिर छन्।

(b) Derive Poisson distribution as a limiting case of Binomial distribution. 5

Poisson distribution-কে Binomial distribution-এর सीमामान हिसेबे निर्णय कर।

Poisson वितरणलाई द्विपदीय (Binomial) वितरणको सीमित अवस्थाको रूपमा प्राप्त गर्नुहोस्।

—×—